665. D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Santi G., Sbaragli S. (2008). Le rôle de l'épistémologie de l'enseignant dans les pratiques d'enseignement. Atti su DVD del Colloque International (con referee): "Les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation. Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats?". 18, 19, 20 settembre 2008. Bordeaux (Francia), Università Bordeaux 4.

Le rôle de l'épistémologie de l'enseignant dans les pratiques d'enseignement

Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Ines Marazzani, George Santi, Silvia Sbaragli
N.R.D. – Université de Bologna

Résumé. Plusieurs épistémologies entrent en jeu dans l'action didactique; une formation épistémologique devrait donc jouer un rôle fondamental dans la formation des enseignants. Des concepts comme ceux de milieu, d'obstacles et de contrat didactique (dans toute leur épaisseur à la fois épistémologiques et didactiques) se prêtent à cette formation.
Cette question est ici discutée et exemplifiée par l'analyse de cas qui témoigneront des effets d'une formation épistémologique lacunaire sur l'action didactique des professeurs.

Mots-clés:
Epistémologie de l'enseignant; milieu; obstacles épistémologiques; obstacles didactiques; contrat didactique.

1. Vers une didactique définie comme épistémologie de l'enseignant

Le terme "épistémologie" et ses différentes acceptions ont été introduits en didactique des mathématiques à la fin des années 1960 et ont donné lieu à une multiplicité de "définitions" et d'interprétations dans le monde, dans les contextes les plus divers. Pour une analyse critique et comparée du terme et de ses occurrences, nous renvoyons à Brousseau (2006a, b).
Une analyse fine de l'épistémologie de l'enseignant permet d'opèrer un rapprochement entre la notion d'épistémologie et les notions de conviction, conception, savoir et connaissance.
En effet par *conception épistémologique,* nous désignons un ensemble de convictions, de connaissances et de savoirs scientifiques qui cherchent à définir les connaissances d'un individu ou d'un groupe d'individus et leur fonctionnement ainsi que les moyens d'évaluer leur validité, de les acquérir et donc de les enseigner et de les apprendre. L'épistémologie cherche à identifier et à unifier différentes conceptions épistémologiques relatives à certaines sciences, à des mouvements de pensée, à des groupes d'individus, à des institutions ou des cultures.
Pour les termes suivants, nous reprendrons les définitions de D'Amore, Fandiño Pinilla (2004):

- *Conviction* (ou croyance): opinion, ensemble de jugements et d'attentes, ce que l'on pense à propos de quelque chose;
- l'ensemble des convictions d'un sujet (A) sur quelque chose (T) donne la *conception* (K) de A à propos de T; si A appartient à un groupe social (S) et s'il partage avec les autres membres de S les mêmes convictions à propos de T, alors K est la conception que S a de T. Néanmoins, au lieu de la "conception que A a de T", on a tendance à parler de l'"image que A a de T".

Par *savoir*, nous entendons un ensemble de connaissances et de comportements qui peuvent être reproduits et qui ont été acquis à travers l'étude ou l'expérience.
On distingue les *savoirs* des *connaissances*:

- on entend par *savoirs*, les données, les concepts, les procédures, les méthodes qui existent en dehors de tout sujet connaissant et qui sont généralement codifiés dans des ouvrages de référence, des manuels, des encyclopédies ou des dictionnaires;

- les *connaissances* sont indissociables d'un sujet connaissant; en d'autres termes, il n'existe pas de connaissances a-personnelles; un individu qui intériorise un savoir *consciemment* transforme ce savoir en connaissance.

Brousseau introduit la notion d'*épistémologie scolaire* pour désigner l'ensemble des convictions - explicites ou implicites- qui circulent au sein de l'école, sur les méthodes, les objets et la finalité des connaissances, des enseignements et des apprentissages. L'*épistémologie scolaire* influe sur l'activité didactique et les programmes dans la mesure où elle influence profondément le choix des savoirs à enseigner, la méthodologie à adopter, les modèles d'apprentissage sur la base desquels l'enseignement doit être organisé.

Celle-ci doit être distinguée de l'*épistémologie de la société* qui se manifeste à travers certaines obligations comme par exemple l'obligation de résultat, la règle des conditions préliminaires suffisantes, la règle d'optimisation et le passage d'une étape à une autre; ces notions sont approfondies dans (Brousseau, 2008).

Les conceptions épistémologiques poussent les enseignants, souvent inconsciemment, à mettre en place des pratiques d'enseignement inadaptées qui renvoient l'apprenant en difficulté à un apprentissage personnel laborieux et qui finira pas l'éloigner des aapprentissage. Les conceptions épistémologiques des enseignants se manifestent à travers une série de comportements et de croyances comme par exemple:

- l'enseignant doit avoir enseigné tout ce qui, selon lui, doit être su;
- l'apprenant doit se souvenir de tout ce que l'enseignant a dit;
- et par conséquent tout devrait être appris par coeur;
- ou bien, l'apprenant devrait être à même d'inventer ou de deviner la réponse exacte le moment venu;
- ou bien, on suppose au contraire que ce qui a été compris est su et donc qu'il n'y a rien à étudier;
- ou que chercher une solution consiste à attendre la réponse miracle…

Ces comportements didactiques non reconnus comme tels , dans la plupart des cas, tendent à éloigner l'activité didactique de sa finalité spécifiquement mathématique et engendrent des stratégies d'évitement que Brousseau a systématisées en termes d'"effets": les enseignants cherchent et acceptent des réponses qui sont formellement correctes mais qui sont obtenues via des moyens rhétoriques dépourvus de toute valeur cognitive et didactique, comme par exemple suggérer la réponse à l'élève (effet Topaze), accepter une mauvaise raison ou une paraphrase (effet Jourdain), abuser des analogies ou de l'ostension, fragmenter le savoir à l'infini…

Nous remarquerons que l'évaluation est également fortement influencée par les conceptions épistémologiques des enseignants. A titre d'exemple, l'idée selon laquelle l'évaluation est influencée par l'épistémologie de la société a entraîné la diffusion de tests formels standardisés, plus simples à réaliser, à compléter et à analyser de manière superficielle. Cette approche de l'évaluation a conduit aux effets signalés par Brousseau dans la pratique scolaire. En voici quelques uns:

i) *La sous évaluation des apprenants*. En effet, par définition, les connaissances ne peuvent pas être évaluées en dehors des situations et notamment par des tests standards. Aujourd'hui, l'évaluation interprète comme un échec le moindre écart par rapport à la norme d'apprentissage, d'où une multiplication dramatique des "cas" d'échec.

ii) *L'allongement illimité du temps d'enseignement.* Devant chaque "échec", l'enseignant se sent contraint de reprendre l'apprentissage dans sa totalité jusqu'à atteindre la forme de "savoir" de la connaissance. À cela s'ajoutent d'autres causes d'allongement du temps d'enseignement: la définition de l'enseignement et la fragmentation du savoir.

iii) *La définition de l'enseignement*. En réalité, cet allongement des temps d'apprentissage individuel augmente car l'enseignant *doit* créer, officiellement ou dans les faits, des groupes de niveau. Le processus débouche sur un enseignement de type individuel. Le temps que l'enseignant

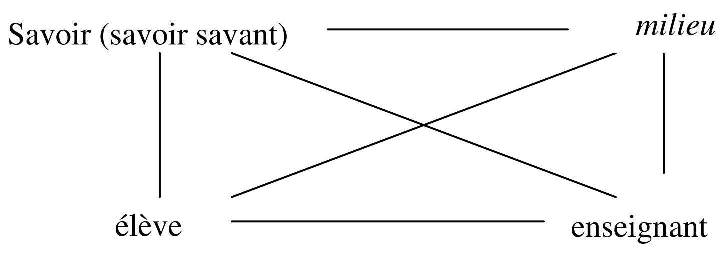
peut consacrer à chaque apprenant est alors insignifiant s'il ne s'agit pas d'un précepteur, à savoir d'un enseignant de cours particuliers à domicile. (Et les précepteurs ne peuvent bénéficier des processus réels de construction des mathématiques).
iv) *La fragmentation du savoir*. Tout "échec" porte à une décomposition en savoirs "plus élémentaires". Les liens entre les savoirs décomposés sont alors de plus en plus difficiles à établir. L'allongement du temps d'enseignement entraîne des conséquences catastrophiques en situation d'enseignement/apprentissage.
v) La concentration sur les savoirs (de bas niveau taxonomique) et donc sur les processus d'apprentissage à bas rendement (comportementalisme) accroît encore davantage le temps d'enseignement.
vi) *Des conséquences sociales* démontrées par les demandes réitérées d'alléger les programmes ou le nombre des objectifs de la part des enseignants.
Après cet aperçu général sur le rôle des conceptions épistémologiques, nous nous attacherons à décrire certains éléments de la didactique des mathématiques fortement liés à l'épistémologie des enseignants et susceptibles de la modifier positivement. Nous analyserons les concepts de milieu et de situation didactique, d'obstacle épistémologique par rapport à l'épistémologie spontanée des enseignants, et celui de contrat didactique afin de montrer combien les systèmes de convictions influent de manière décisive sur les processus d'enseignement/apprentissage.

2. Le milieu

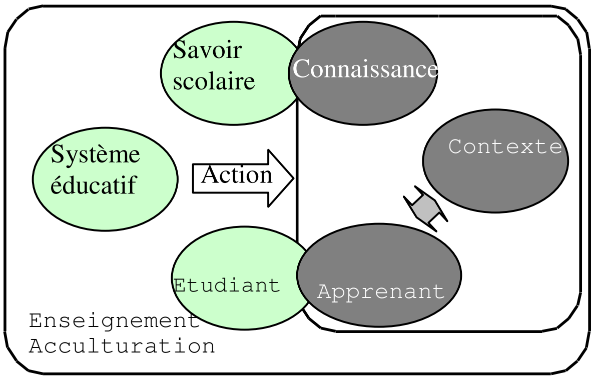
La théorie des situations nous apprend que l'enseignant doit savoir susciter chez l'apprenant des comportements que ce dernier, pour afficher sa connaissance, devrait acquérir de manière autonome. Ce qui semble paradoxal. Ou mieux: il s'agit bel et bien d'un paradoxe. La solution de la théorie des situations est d'impliquer un troisième élément, le *milieu*, et faire en sorte que la réponse de l'apprenant se rapporte exclusivement aux besoins du *milieu*.
L'art de l'enseignant consiste alors d'établir une relation entre l'apprenant et le *milieu* qui:

- d'une part, laisse une incertitude raisonnable que les connaissances du sujet doivent permettre de réduire;
- et qui, d'autre part, permette que cette réduction puisse effectivement se réaliser avec un degré d'incertitude limité, du point de vue de l'enseignant.

Le concept de milieu permet d'élaborer le schéma ci-dessous que nous appellerons le "quadrilatère" didactique:



Ce schéma présente des lacunes dans la mesure où il ne permet pas de distinguer les "savoirs" scolaires à enseigner ou déjà enseignés, des "connaissances" de l'apprenant qui ne coïncident pas et qui fonctionnent selon des modalités différentes. En outre, les sujets apprenants ne présentent pas les mêmes caractéristiques. Ainsi l'"hexagone didactique" proposé par G. Brousseau nous semble donc plus fonctionnel.



3. Les obstacles épistémologiques

Les études sur l'apprentissage des nombres naturels menées par Brousseau, dès le début des années 1960 jusqu'à la fin des années 1980, ont permis de démontrer que l'apprentissage se construit à travers des sauts de complexité "informationnelle" et que ce phénomène pouvait être généralisé en mathématiques.
Contrairement à ce qu'avançait Gaston Bachelard (1938) à propos de l'absence en mathématiques d'obstacles de type épistémologique, les recherches menées dans ce domaine ont justement permis d'aboutir à ce concept au sein de la recherche scientifique. La compréhension des nombres naturels exige, par exemple, de concevoir les nombres et leurs opérations selon une approche bien précise: un nombre naturel comme 4 a un successeur, son produit par un autre nombre naturel sera plus grand etc. Ces mêmes propriétés sont parfois erronées si 4 est un nombre rationnel n'a pas de successeur. Néanmoins, l'apprenant ne se rend pas compte de ce passage et continue à "forcer" les propriétés de N en les appliquant à Q; certains soutiennent, pour Q, que 2,33 est le successeur de 2,32 (encouragés par ailleurs par certains manuels). Prenons enfin l'exemple de $0{,}7\times0{,}8 = 0{,}56$ où 0,56 est plus petit que chacun des deux facteurs, résultat déconcertant qui remet en question les connaissances acquises précédemment.
L'apprenant ne remarque quasiment pas cette transformation du savoir. L'enseignant nomme multiplication ou division les nouvelles opérations que les apprenants devraient reconnaître et assimiler aux précédentes. La connaissance des nombres naturels est indispensable pour acquérir celle des nombres rationnels mais parallèlement elle représente un obstacle à l'apprentissage. Ce phénomène est à l'origine de malentendus et de difficultés à la fois importantes et invisibles dans la mesure où l'obstacle se cache, certes, à l'intérieur d'un savoir qui fonctionne mais il s'agit d'un savoir "local" qui ne peut être généralisé à l'objet mathématique à acquérir.
Voilà le sens même de la notion d'*obstacle épistémologique*. Ce concept participe à la formation de la conception épistémologique de l'enseignant et joue un rôle clé dans la transformation du savoir en connaissance. Il est donc essentiel de garantir aux futurs enseignants de mathématiques une préparation adéquate, à la fois historique et épistémologique. Il ne faut toutefois pas oublier qu'elle se greffe sur une épistémologie que l'on peut appeler *épistémologie spontanée des enseignants* (Speranza, 1997; Brousseau, 2006a).
Au moment de prendre leurs décisions en salle de classe, les enseignants ont recours de manière explicite ou implicite à tout type de connaissances, méthodes, convictions sur la manière de trouver, d'apprendre ou d'organiser un savoir. Ce bagage épistémologique est construit essentiellement de manière empirique afin de répondre aux besoins didactiques. Il s'agit parfois du seul moyen dont les enseignants disposent pour proposer les procédés didactiques qu'ils ont précédemment retenus et pour les faire accepter par les apprenants et leur environnement. L'ensemble des convictions des

enseignants, des apprenants ou de leurs parents sur ce qu'il convient de faire pour enseigner, apprendre et comprendre les savoirs en jeu constitue une *épistémologie* pratique que l'on ne peut en aucun cas ignorer et rejeter. L'épistémologie philosophique ou scientifique peut difficilement prétendre endosser ce rôle.

L'épistémologie spontanée puise ses racines dans des pratiques ancestrales: la tendance à communiquer des expériences d'une génération à l'autre est un trait spécifique à l'humanité. L'opposer aux connaissances scientifiques serait absurde: il faut la respecter, la comprendre et l'utiliser de manière expérimentale comme tout phénomène naturel.

L'introduction de l'épistémologie et des théories scientifiques relatives à la formation des enseignants présente un nouvel avantage (D'Amore, 2004).

On assiste à l'application des deux formes d'épistémologie lorsque l'enseignant a recours à l'analogie pour aider l'élève en difficulté. Après des activités de soutien opportunes, l'enseignant propose une situation analogue où l'apprenant, convenablement "formé", est à même de résoudre le problème avec succès. On assiste à une fraude épistémologique car l'élève répond correctement sans qu'il y ait un véritable apprentissage à la fois solide et conscient qui puisse répondre aux attentes de l'enseignant. Nous retrouvons l'effet Jourdain, mentionné plus haut.

L'activité de l'apprenant doit répondre à deux contraintes incompatibles:

- une contrainte déterminée par les conditions adidactiques qui impliquent une réponse originale et l'organisation de connaissances spécifiques;
- une contrainte déterminée par les conditions didactiques qui ont pour but de générer la réponse attendue indépendamment des modalités de production.

Cet exemple montre que si l'épistémologie et les sciences cognitives peuvent étudier ou rendre compte des réponses des apprenants sous la première contrainte, elles ne peuvent prétendre aider les enseignants en ignorant la deuxième. Les contraintes didactiques finiront par opprimer les contraintes cognitives. Elles transforment la nature même des connaissances et leur fonctionnement. L'enseignement devient ainsi une simulation de la genèse des connaissances. Cette thématique illustre la complexité de l'épistémologie de l'enseignant qui ne peut se réduire à une dimension purement cognitive ou épistémologique mais qui remet en cause la complexité des processus d'enseignement/apprentissage que l'enseignant doit savoir gérer.

4. Le contrat didactique

Le contrat didactique, par sa force et ses implications, montre comment un système d'attentes, de convictions et d'interprétations sur les mathématiques, influencées également par l'épistémologie de l'enseignant, ont des répercussions lourdes, inattendues et surprenantes dans l'apprentissage des mathématiques.

Une expérience a été menée en classe de CE2 (élèves entre 8 et 9 ans) et de 5ème (12 - 13 ans) afin d'étudier les comportements des apprenants face à un problème où certaines données ont été omises (D'Amore, Sandri, 1998).

> Exemple:
> «Giovanna et Paola vont faire les courses. Giovanna dépense 10.000 lires et Paola dépense 20.000 lires. Après les achats, qui a le plus d'argent dans son porte-monnaie, Giovanna ou Paola?».

Ci-après un prototype du genre de réponses fournies par les élèves de CE2. Nous analyserons le protocole de réponse de Stefania, que nous reproduisons ci-dessous:

> Stefania:
>
> C'est Giovanna qui a le plus d'argent dans son porte-monnaie:
> 30-10=20

10×10=100

Dans la mesure où il s'agit d'un "contrat", nous avons identifié au fil du temps des *constantes de comportement* que l'on appellera "clauses".
Dans le cas présent, deux clauses jouent un rôle fondamental:

- *la clause des attentes*: l'enseignante attend une réponse, je dois donc fournir cette réponse, peu importe le sens du texte;
- *la clause de la constance*: l'enseignante a *toujours* donné des problèmes à résoudre sous la forme d'un texte rédigé avec des nombres, et pour fournir un résultat j'ai *toujours* effectué des opérations à partir de ces nombres; nous avons *toujours* travaillé comme ça, je dois forcément faire la même chose ici *encore*.

La réponse «Giovanna» (réponse fournie par 58,4% des apprenants de CE2 entre 8 et 9 ans) est justifiée dans la mesure où l'apprenant estime que si l'enseignant donne un problème, celui-ci *doit pouvoir être résolu*; ainsi, quand bien même l'apprenant se rend compte qu'il manque la somme de départ, il finit par l'inventer de manière implicite, plus ou moins de la sorte: «Je *dois* pouvoir résoudre ce problème; par conséquent, Giovanna et Paola avait sans doute la même somme de départ». Dans ce cas-là, *la réponse est correcte*: dans la mesure où Giovanna dépense moins, il lui reste forcément plus d'argent. Ce qui justifie la partie rédigée dans la réponse de Stefania. Un autre mécanisme se met alors en place qui est lié à une autre clause (du type: représentations des mathématiques, attentes supposées de la part de l'enseignant): «Ça ne peut pas suffire, en mathématiques il faut faire des calculs, la prof attend sûrement des calculs». Dès lors, le contrôle critique s'écroule et... tous les calculs sont bons.
Dans D'Amore, Sandri (1998) (et dans d'autres études ultérieures), nous avons étudié dans les détails cette clause du contrat didactique que nous avons appelée "exigence de la justification formelle" ou ejf. Cette clause est également très présente au collège (apprenants entre 11et 14 ans): [58,4% des élèves en CE2 (8-9 ans) ont répondu «Giovanna» contre 24,4% en 5ème (12-13 ans); mais seuls 63,5% des élèves de 5ème affirment que le problème est impossible à résoudre; donc 36,7% des élèves fournissent une réponse: plus d' 1/3 en moyenne].
Nous reproduisons ci-dessous la réponse fournie par une élève de 5ème pour le même problème:

Silvia:

D'après moi, c'est Giovanna qui a le plus d'argent dans son porte-monnaie car:
Giovanna dépense 10.000 tandis que Paola dépense 20.000.

10.000	20.00
Giovanna	Paola

20.000-10.000=10.000 (Giovanna)
10.000+10.000=20.000 (Paola)

Dans le protocole de Silvia nous retrouvons les mêmes clauses du contrat didactique mises en oeuvre dans le protocole de Stefania mais son analyse est plus complexe. En premier lieu, on remarque un effort d'organisation logique et formelle. Tout d'abord, Silvia a fait le même raisonnement que Stefania: elle a répondu spontanément «Giovanna» sans faire de calculs; puis, en raison de la clause ejf, elle estime qu'elle *doit* fournir des calculs. Elle se rend probablement compte, sans doute de manière confuse, que ses opérations sont détachées de la logique du problème; elle effectue ces opérations uniquement parce qu'elle estime *devoir* le faire. Mais, aussi absurde que cela puisse paraître, l'élève finit par juger ses calculs plausibles. En effet, dans la mesure où elle est parvenue à tirer un résultat à partir de calculs –insensés- qui contrastent avec le résultat donné de manière intuitive, elle préfère remettre en question sa propre intuition et accepter la réponse obtenue de manière formelle. Après ses calculs, elle conclut que c'est Paola qui a le plus d'argent dans son porte-monnaie et non plus Giovanna, comme elle l'avait préalablement supposé;

elle finit donc par barrer Giovanna et par ajouter Paola:

> D'après moi, c'est ~~Giovanna~~ Paula qui a le plus d'argent dans son porte-monnaie car:
> Giovanna dépense 10.000 tandis que Paola dépense 20.000.
> 10.000 20.00
> Giovanna Paola
> 20.000-10.000=10.000 (Giovanna)
> 10.000+10.000=20.000 (Paola)

C'est le contrat didactique, dicté ici par une représentation formelle (inefficace et nuisible) des mathématiques, qui l'a remporté sur la raison...

5. Convictions erronées des enseignants: quelques exemples

Au cours des dernières années, de nombreuses recherches se sont intéressées à l'analyse des convictions et des changements de convictions des enseignants sur différentes notions mathématiques. Ces études ont montré combien les convictions des enseignants influencent les pratiques de classe. On remarque en effet un lien de cause entre les convictions et les *misconceptions* dans la mesure où les *misconceptions* des apprenants découlent souvent directement des *misconceptions* des enseignants et de leurs convictions, selon la séquence suivante: conviction de l'enseignant → *misconception* de l'enseignant → *misconception* de l'apprenant → conviction de l'apprenant.
Analysons quelques exemples.

5.1. *Infini*
Dans Sbaragli (2006), on propose la synthèse d'une recherche menée sur plusieurs années sur les convictions et leurs changements chez des enseignants de l'école primaire en matière d'infini mathématique. Cette recherche a permis de montrer que cette notion est inconnue des enseignants de ce niveau scolaire aux plans mathématique et épistémologique comme au le plan cognitif. On retrouve ainsi, parmi les conceptions des enseignants, de nombreuses misconceptions qui touchent plusieurs domaines des mathématiques. En outre, le changement éventuel de convictions qui peut se produire chez certains enseignants face à un élémentaire traitement mathématique de l'infini mathématique montre bien combien les connaissances sur l'infini mathématique s'appuient uniquement sur des convictions spontanées et intuitives basées sur le bon sens. Il en découle, de la part des enseignants, un fort sentiment de gêne par rapport à ce type de savoir, une gêne qui a des répercussions négatives sur la transposition didactique.
Voyons ci-après un exemple de misconception. À la question: *Y a-t-il plus de points dans le segment AB ou dans le segment CD?* (les segments ont été tracés sur une feuille de sorte que CD soit plus long que AB), les 16 enseignants interrogés ont fourni les réponses suivantes:

> B.: *Dans le segment CD, forcément, il est plus long.*
> Chercheur: *Combien en plus*?
> B.: *Tout dépend de la longueur.*
> M.: *Tout dépend aussi de la largeur et s'ils sont juxtaposés. Mais si les deux segments sont rapprochés au maximum et s'ils sont de la même longueur, alors il y a plus de points dans le segment CD.*

Ces affirmations laissent apparaître le soi-disant "modèle du collier" selon lequel un segment est un fil formé de minuscules perles-points au contact les unes des autres; ce modèle a déjà été mis en évidence dans de nombreuses recherches (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).

Ces recherches ont permis de démontrer que des étudiants plus mûrs (en lycée) ne parviennent pas à s'approprier le concept de continuité en raison de ce modèle intuitif persistant. Grâce aux informations fournies par les enseignants, nous avons pu démontrer que ce modèle ne représente pas seulement un stratagème didactique auquel les enseignants ont recours pour donner aux apprenants une première idée de segment avant une démonstration plus correcte - conscients toutefois qu'il s'agit d'une représentation approximative très éloignée du concept mathématique de segment - mais qu'il s'agit du modèle que les enseignants même ont du segment et qu'ils donnent donc comme modèle définitif à leurs propres apprenants. En outre, il ressort des conversations plusieurs lacunes au niveau des compétences des enseignants qui sont liées notamment aux concepts de densité et de continuité de l'ensemble ordonné des points de la ligne droite. Les lacunes n'apparaissent pas seulement à l'école élémentaire mais on les retrouve à tous les niveaux scolaires et chez tous les enseignants qui n'ont pas été amenés à réfléchir sur cette notion sous un angle épistémologique.
Lors d'une recherche menée ultérieurement dans ce domaine, (Sbaragli, 2007), l'auteur a recueilli des signes d'embarras de la part d'enseignants dans la construction conceptuelle de cette notion. Par exemple, certains enseignants déclarent expliciter à leurs propres élèves des affirmations que l'on retrouve dans la misconception de *dépendance* du cardinal des ensembles numériques:

> A.: *Je dis à mes élèves que tous les nombres: 0, 1, 2, 3, … sont le double des pairs parce qu'il manque tous les impairs. Et puis, je leur dis que si nous ajoutons les négatifs, nous avons encore une quantité infinie de nombres par rapport à 0, 1, 2, ….*

Ce phénomène de dépendance s'explique par une approche qui reconnaît, dans tous les cas, la validité de la notion commune n° 8 d'Euclide: *Le tout est plus grand que la partie*, pour le fini comme pour l'infini.
Ces exemples montrent combien les intuitions des enseignants sont éloignées du "savoir institutionnel" souhaité en mathématiques. Les misconceptions sont transmises aux apprenants durant les pratiques de classe, ce qui entraînera des conséquences négatives en termes d'apprentissage aux niveaux scolaires plus avancés.

5.2. *Périmètre et Aire*
Dans Fandiño Pinilla, D'Amore (2007) et dans la recherche qui l'a précédé et rendu possible, (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005), on a relevé les erreurs des apprenants lorsqu'il s'agit d'évaluer les rapports entre l'aire et le périmètre des figures planes: ils ont tendance en effet à déduire de manière irrationnelle des majorations et des minorations entre des entités en rapport.
Par exemple, la littérature a amplement démontré que de nombreux apprenants de tout âge sont convaincus qu'il existe un lien étroit de dépendance entre les deux concepts sur le plan relationnel, du type:

Si A et B sont deux figures planes, alors:

- si (périmètre de A > périmètre de B) alors (aire de A > aire B)
- idem avec <
- idem avec = (ainsi: deux figures isopérimétriques ont forcément la même aire);
- et vice-versa, en inversant l'ordre périmètre – aire en aire – périmètre.

Une recherche menée sur ces enseignants a permis de démontrer que ce préconcept était également présent dans les convictions des professeurs. Nous observons ainsi que d'une part, les convictions des enseignants influencent nettement celles des apprenants; de l'autre, on retrouve une certaine disponibilité à modifier ses propres convictions, voire même au niveau du contenu.
On retrouve ces rapports forcés entre le périmètre et l'aire des figures planes dans l'histoire la plus reculée, dans le mythe et dans la légende à tel point que l'on peut affirmer que le périmètre, l'aire et

leurs relations réciproques représentent des obstacles épistémologiques. Si l'on examine les convictions des enseignants (de tout niveau scolaire) à ce sujet, on comprend très bien pourquoi ces objets mathématiques sont souvent traités de manière telle à représenter des obstacles didactiques.

5.3. *Fractions*

Dans Fandiño Pinilla (2005) et dans les travaux de recherche précédents et ultérieurs (cf. à titre d'exemple Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli, 2006), on a répertorié et classé d'un point de vue purement mathématique -sans aucune proposition efficace sur le plan didactique- une infinité d' "erreurs" que l'on retrouve de manière diffuse et qui, depuis des décennies, font l'objet d'études.

Les recherches préliminaires, et sans doute encore davantage les suivantes, ont démontré encore une fois que l'erreur est motivée et causée par les convictions des enseignants.

En effet, dans Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli (2006), on propose à ce sujet le compte-rendu d'une expérience d'apprentissage et de recherche mise en acte par un groupe de 36 enseignants (école maternelle, école primaire et collège). La notion de fractions jugée comme particulièrement complexe sur le plan conceptuel de la part des apprenants mais qui ne présente aucune difficulté d'un point de vue mathématique, a été abordée en premier lieu à l'occasion de cours de formation et lors de travaux collectifs en suivant l'ouvrage de Fandiño Pinilla (2005). L'approche consciente et adulte du point de vue mathématique, épistémologique et didactique a poussé les membres du groupe à exprimer leurs premières convictions mathématiques, épistémologiques et didactiques puis à prendre conscience des changements même notables qu'ils ont pu remarquer. Ils ont ainsi été amenés, toujours en termes de recherche-action, à revoir leurs propres positions en ce qui concerne la transposition didactique des fractions. La méthodologie retenue pour ce compte-rendu est celle de la réflexion personnelle (que certains appellent "autobiographie").

Par exemple, seuls quelques enseignants avaient d'ores et déjà réfléchi sur la définition de fraction, à savoir une unité divisée en parties "égales", et notamment sur le fait qu'ils utilisaient un terme plutôt générique qui doit être interprété selon les contextes. Le premier ouvrage répertorie 12 contextes très différents.

Par exemple, si on divise une figure plane en parties "égales", on entend "qui ont la même aire"; si on divise un nombre de personnes en parties "égales", on fait référence uniquement à un nombre; si on divise un nombre en parties "égales", alors il faut effectuer une opération de division (et le doute s'installe: parle-t-on de N ou de Q vu que l'opération de division n'est pas interne à N?); etc.

Et pourtant les enseignants affirmaient initialement:

> S.: *La fraction est une opération qui permet de diviser un entier en parties égales.*
> A.: *Pour moi, la fraction est quelque chose que l'on divise en parties égales, une division en quelque sorte. Mais la fraction divise 1 chose (un gâteau, un cercle, un bonbon, un objet), tandis que la division divise plusieurs choses (des nombres, des objets).*
> C.: *Le jour où je me suis présentée avec une tarte, j'avais 17 élèves en classe, j'ai donc décidé, pour un meilleur partage, de rajouter une part pour moi!*

Suite à ce parcours qui a débouché sur un changement notable au niveau des convictions des enseignants, voilà les affirmations qui ont été relevées:

> A.: *D'après nous, l'image du gâteau partagé en plusieurs parties "égales" était efficace, elle permettait aux élèves de comprendre le rapport entre l'entier et ses parties. Cette image était aussitôt ancrée dans la tête de nos élèves et on pensait pouvoir passer immédiatement à la définition qui cristallisait le concept de fraction. Je me rends compte aujourd'hui que cette définition n'est pas assez précise et qu'elle ne tient pas compte des différents sens de fraction et des différents contextes d'utilisation. De plus, cette image est si simple qu'elle*

se fixe immédiatement: je pensais que c'était un avantage, mais je comprends maintenant qu'elle est source de difficultés.

D.: *C'est vrai, ce maudit gâteau que j'apportais à l'école car je pensais que ça marchait très bien, il s'est inscrit de manière indélébile dans leur mémoire. J'étais persuadée qu'il suffisait d'enseigner les fractions comme je les avais moi-même apprises, mais je me trompais…Oh que je me suis trompée!*

Nous pourrions émettre les mêmes considérations que dans les exemples précédents. Pour les fractions, il semble n'y avoir aucun signe d'obstacles épistémologiques puisque la prise en charge des fractions par la communauté mathématique s'est vérifiée dans les temps les plus reculés (fin de l'Egypte ¯ 2000 et sans doute plus tôt). Néanmoins, une étude attentive et critique démontre le contraire. L'idée de fraction a constitué un moment de rupture remarquable et de crise dans l'évolution de l'histoire des mathématiques (Fandiño Pinilla, 2005). De plus, comme nous l'avons noté, les fractions représentent un obstacle didactique considérable.

7. Conclusion

La formation des enseignants est un sujet qui revête de plus en plus d'importance, non seulement pour la recherche en Didactique des Mathématiques mais également pour ses implications pédagogiques et sociales qui influent sur la société. En l'absence de résultats satisfaisants dans ce domaine de recherche, on pourra difficilement dépasser les difficultés cognitives et le sentiment d'aversion affective que la plupart des étudiants éprouvent pour les mathématiques. Le développement de la didactique des mathématiques comme épistémologie des mathématiques semble représenter un cadre théorique à même d'accueillir et de gérer la complexité de ce courant de recherche. L'épistémologie de l'enseignant que nous avons définie comme un système de convictions qui influe lourdement sur les processus d'enseignement/apprentissage des mathématiques interagit avec toutes les variables du système didactique.
Dans le présent travail, nous avons montré le rapport entre les conceptions épistémologiques de l'enseignant et certains éléments caractéristiques de la didactique des mathématiques et nous avons souligné que l'absence d'une culture épistémologiques adéquate risque d'éloigner l'enseignant des objectifs de la didactique. L'enseignement des mathématiques se réduit alors à un ensemble de techniques détachées les unes des autres qui permettent tout au plus d'atteindre de maigres résultats peu significatifs.

Bibliographie

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo ma non ci credo...". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-57.

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, Vrin.

Brousseau G. (2006a). Epistemologia e didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*. 4, 621-655.

Brousseau G. (2006b). Epistemologia e formazione degli insegnanti. In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, venti anni di impegno*. Actes du colloque international du même nom. Castel San Pietro Terme, 23 septembre 2006. Bologna: Pitagora. 54-58. Publié également dans: D'Amore B. (ed.) (2006). *Matematica: l'emergenza della didattica nella* *formazione*. Numéro spécial monothématique de *Rassegna*. 29, 29-33.

Brousseau G. (2008). L'epistemologia scolastica spontanea e la cultura dei problemi matematici. *La matematica e la sua didattica.* 22, 2, 165-183.

Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.

D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30. En espagnol (2004): El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon*. 60, 20, 3, 413-434.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50. 30. En espagnol (2004): Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Espilon*. 58, 20, 1, 25-43.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Area e perimetro. Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 165-190.

D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-18. En français (1998): *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 55-94.

Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B. (2007). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

Sbaragli S. (2006). Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.* 5, 2, 49-76.

Sbaragli S. (2007). Le "proposte" degli insegnanti di scuola primaria concernenti l'infinito matematico. In: Giacardi L., Mosca M., Robutti O. (2007). *Conferenze e seminari 2006-2007.* 73-87.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.